AGM

Árvores geradoras de custo mínimo (MST)

O problema da árvore geradora de custo mínimo é um problema fundamental sobre grafos não-dirigidos com custos nas arestas. (Há um problema semelhante para grafos dirigidos, mas ele é bem mais difícil.)

Sumário:

Árvore geradora mínima

Seja G um grafo não-dirigido com custos nas arestas. O custo de cada aresta pode ser positivo ou negativo. O *custo* de um subgrafo não-dirigido T de G é a soma dos custos das arestas de T.

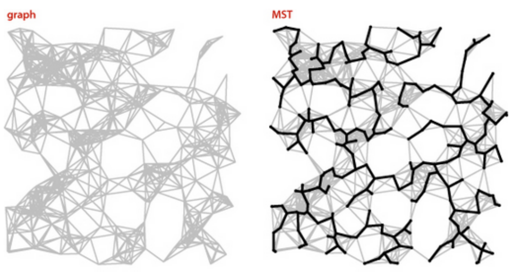
Uma *árvore geradora mínima* de G é qualquer árvore geradora de G que tenha custo mínimo. Em outras palavras, uma árvore geradora T de G é mínima se nenhuma outra árvore geradora tem custo menor que o de T. Árvores geradoras mínimas também são conhecidas pela abreviatura *MST* de *minimum spanning tree*.

> PROBLEMA DA MST: Dado um grafo não-dirigido com custos nas arestas, encontrar uma árvore geradora mínima do grafo.

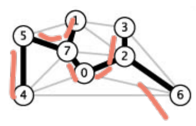
É claro que o problema tem solução se e somente se o grafo é conexo. Outra observação óbvia: se todos as arestas tiverem o mesmo custo então *toda* árvore geradora é uma MST.

Este capítulo faz uma introdução geral ao problema da MST. Algoritmos serão examinados em capítulos subsequentes.

Exemplo A. A figura mostra uma MST de um grafo não-dirigido com custos nas arestas. Os 250 vértices são pontos no plano e o custo de cada aresta `v-w` (há 1273 delas) é igual à distância geométrica entre os pontos `v` e `w`.



Exemplo B. Considere o grafo não-dirigido com custos nas arestas definido a seguir. (O custo de cada aresta é proporcional ao comprimento geométrico do segmento de reta que representa a aresta na figura.)



4-5	4-7	5-7	0-7	1-5	0-4	2-3	1-7	0-2	1-2	1-3	2-7	6-2	3-6	6-0	6-4
35	37	28	16	32	38	17	19	26	36	29	34	40	52	58	93

O conjunto de arestas `4-5 5-7 0-7 2-3 1-7 0-2 6-2` define uma árvore geradora do grafo. O custo dessa árvore é 35 + 28 + 16 + 17 + 19 + 26 + 40 = 181. Essa árvore é uma MST, embora isso não seja óbvio.

Exercícios 1

1. [Sedgewick 20.1] *Mudança de escala.* Seja T uma MST de um grafo não-dirigido G com custos nas arestas. Mostre que T continua sendo uma MST de G se o custo de cada aresta for multiplicado por uma constante $p \geq 0$. (A propriedade continua válida se p for negativo?) Mostre que T continua sendo uma MST de G se somarmos uma constante q ao custo de cada aresta (a constante pode ser positiva ou negativa).
2. Suponha que todas as arestas de um grafo não-dirigido conexo têm o mesmo custo. Mostre que toda árvore geradora do grafo é uma MST.
3. Mostre que um grafo não-dirigido conexo com custos nas arestas pode ter mais de uma MST. (Por isso dizemos *uma* MST e não *a* MST.)
4. É verdade que quaisquer duas MSTs de um grafo não-dirigido têm pelo menos uma aresta em comum?

5. [Sedgewick 20.5] Suponha que os custos das arestas de um grafo não-dirigido conexo são distintos entre si (ou seja, não há duas arestas com o mesmo custo). Mostre que o grafo não-dirigido tem uma única MST.
6. [Sedgewick 20.6] *Certo ou errado?* Se um grafo não-dirigido tem uma única MST então os custos de suas arestas são distintos entre si.
7. Seja G um grafo não-dirigido conexo com custos nas arestas. Suponha que uma aresta e de G é mais cara que qualquer outra aresta de G. É verdade que nenhuma MST de G contém e?
8. *Certo ou errado?* Dadas duas árvores geradoras T e T', se T é mais barata que T' então T tem uma aresta mais barata que qualquer das arestas de T'.
9. [Sedgewick 20.25] Suponha que os custos das arestas de um grafo não-dirigido conexo são distintos entre si. Seja C um circuito do grafo. É verdade que a aresta mais barata de C pertence à (única) MST do grafo?
10. Seja T uma MST de um grafo não-dirigido com custos nas arestas. Suponha que um corte tem uma única aresta de custo mínimo. É verdade que T tem uma única aresta desse corte?
11. [Sedgewick figura 20.1] Tente encontrar uma MST no grafo não-dirigido com custos nas arestas descrito a seguir.

```
0-6  0-1  0-2  4-3  5-3  7-4  5-4  0-5  6-4  7-0  7-6  7-1
 51   32   29   34   18   46   40   60   51   31   25   21
```

12. [Sedgewick 20.21] Considere o grafo não-dirigido cujos vértices são os pontos no plano dados a seguir por suas coordenadas.

```
  0     1     2     3     4     5
(1,3) (2,1) (6,5) (3,4) (3,7) (5,3)
```

Suponha que as arestas do grafo são `1-0 3-5 5-2 3-4 5-1 0-3 0-4 4-2 2-3` e o custo de cada aresta `v-w` é igual ao comprimento do segmento de reta que liga os pontos `v` e `w` no plano. Tente encontrar uma MST desse grafo.

13. [Sedgewick 20.2] *Subgrafo gerador conexo mínimo.* Suponha que os custos das arestas de um grafo não-dirigido conexo G são todos estritamente positivos. Seja H um grafo de custo mínimo dentre todos os subgrafos não-dirigidos geradores conexos de G. Mostre que H é uma MST de G.
14. [Sedgewick 20.3] Repita o exercício anterior sob uma hipótese mais fraca: todo circuito de G tem pelo menos uma aresta de custo estritamente positivo.
15. [Sedgewick 20.4] *Árvore de custo máximo.* Como encontrar uma árvore geradora de custo *máximo* num grafo não-dirigido conexo com custos nas arestas?
16. *CPT versus MST.* Mostre que MSTs e CPTs (árvores de caminhos baratos) de grafos não-dirigidos podem ser muito diferentes. Dê um exemplo de um grafo não-dirigido conexo G com custos positivos nas arestas e uma MST T nesse grafo que tenha a seguinte propriedade: para todo vértice s existe um vértice t tal que a distância de s a t em G é diferente da distância de s a t em T. (Dica: existem exemplos com 4 vértices apenas.)

Critério de minimalidade baseado em circuitos

Dada uma MST de um grafo, não é necessariamente verdade que todas as arestas baratas estão na MST e todas as caras estão fora. Mas uma versão mais fraca dessa afirmação é verdadeira. Especificamente, a *propriedade dos circuitos* (*propriedade insere-remove*) do capítulo *Árvores geradoras* leva ao seguinte

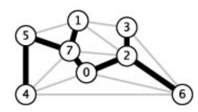
> CRITÉRIO DE MINIMALIDADE BASEADO EM CIRCUITOS: Uma árvore geradora T de um grafo não-dirigido com custos nas arestas é uma MST se e somente se toda aresta e fora de T tem custo máximo no circuito fundamental de e relativo a T.

Se denotarmos por c_a o custo de uma aresta a, podemos formular o critério assim: T é uma MST se e somente se $c_e \ge c_t$ para cada aresta e fora de T e qualquer aresta t do circuito fundamental de e.

Exemplo C. Considere o grafo não-dirigido com custos nas arestas definido a seguir. (Os custos das arestas não exatamente iguais aos do exemplo B.)

```
4-5 4-7 5-7 0-7 1-5 0-4 2-3 1-7 0-2 1-2 1-3 2-7 6-2 3-6 6-0 6-4
 35  37  28  16  32  38  17  19  26  36  25  34  40  52  58  93
```

O conjunto de arestas `4-5 5-7 0-7 2-3 1-7 0-2 6-2` define uma árvore geradora T do grafo. A aresta `1-3` não tem custo máximo no circuito `1-3-2-0-7-1` pois ela é mais barata que a aresta `0-2`. Portanto, T não é uma MST. (De fato, se substituirmos `0-2` por `1-3` na árvore T, teremos uma árvore geradora mais barata.)



Exercícios 2

1. Prove o critério de minimalidade baseado em circuitos. (Qual das duas partes da prova é mais fácil: a parte “se” ou a parte “só se”?) [Solução]
2. Seja T uma MST de um grafo não-dirigido G com custos nas arestas. Seja e uma aresta fora de T. É verdade que e é a única aresta de custo máximo no único circuito de $T + e$?
3. [Sedgewick 20.22] Seja a uma aresta de custo mínimo em um grafo não-dirigido conexo G. É verdade que a pertence a alguma MST de G? É verdade que a pertence a toda MST de G?
4. Seja C um circuito em um grafo não-dirigido conexo G com custos nas arestas. Suponha que uma aresta e de C é mais cara que qualquer outra aresta de C. É verdade que nenhuma MST de G contém e?
5. Seja G um grafo não-dirigido com custos nas arestas. Seja C um circuito e T uma MST de G. É verdade que toda aresta e

de C que não está em T tem custo máximo em C? Ou seja, é verdade que nenhuma aresta de C é mais cara que e?

6. ★ *Análise de sensibilidade.* Seja G um grafo não-dirigido com custos nas arestas e T uma MST de G. Seja e uma aresta fora de T e imagine alterar o custo de e mantendo os custos das demais arestas. Em quanto posso aumentar o custo de e sem que T deixe de ser uma MST? Em quanto posso diminuir o custo de e sem que T deixe de ser uma MST? Escreva uma função que responda essas perguntas.

Critério de minimalidade baseado em cortes

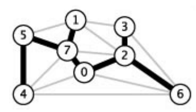
Dada uma MST de um grafo, não é necessariamente verdade que todas as arestas baratas estão na MST e todas as caras estão fora. Mas uma versão mais fraca dessa afirmação é verdadeira. Especificamente, a *propriedade dos cortes* (*propriedade remove-insere*) do capítulo *Árvores geradoras* leva ao seguinte

> CRITÉRIO DE MINIMALIDADE BASEADO EM CORTES: Uma árvore geradora T de um grafo não-dirigido com custos nas arestas é uma MST se e somente se cada aresta t de T tem custo mínimo no corte fundamental de t relativo a T.

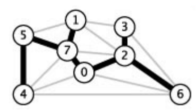
Se denotarmos por c_a o custo de uma aresta a, podemos formular o critério assim: T é uma MST se e somente se $c_t \leq c_e$ para cada aresta t de T e qualquer aresta e do corte fundamental de t.

Exemplo D. Considere o grafo não-dirigido com custos nas arestas definido a seguir. (Os custos das arestas não são exatamente iguais aos do exemplo B.)

```
4-5 4-7 5-7 0-7 1-5 0-4 2-3 1-7 0-2 1-2 1-3 2-7 6-2 3-6 6-0 6-4
 35  37  28  16  32  38  17  19  26  36  25  34  40  52  58  93
```



Seja T a árvore geradora definida pelo conjunto de arestas `4-5 5-7 0-7 2-3 1-7 0-2 6-2`. A aresta `0-2` não tem custo mínimo no corte `1-3 1-2 7-2 0-2 0-6 4-6` pois o custo de `0-2` é maior que o custo de `1-3`. Portanto, T não é uma MST. (De fato, se substituirmos `0-2` por `1-3` em T, teremos uma árvore geradora mais barata.)



Exemplo E. Considere mais uma vez o grafo não-dirigido do exemplo B (a tabela de custos está reproduzida a seguir). Seja T a árvore geradora sugerida na figura. Cada aresta que não está em T tem custo máximo no seu circuito fundamental (verifique!). Segue daí que T é uma MST.

```
4-5 4-7 5-7 0-7 1-5 0-4 2-3 1-7 0-2 1-2 1-3 2-7 6-2 3-6 6-0 6-4
 35  37  28  16  32  38  17  19  26  36  29  34  40  52  58  93
```

Podemos fazer uma verificação análoga para as arestas de T: cada aresta de T tem custo mínimo no seu corte fundamental (verifique!). Segue daí que T é uma MST.

Exercícios 3

1. Prove o critério de minimalidade baseado em cortes. (Qual das duas partes da prova é mais fácil: a parte "se" ou a parte "só se"?)
2. Seja T uma MST de um grafo não-dirigido G com custos nas arestas. Seja C um corte de G. É verdade que toda aresta t de T em C tem custo mínimo em C? Ou seja, é verdade que nenhuma aresta de C é mais barata que t?
3. Seja T uma MST de um grafo não-dirigido G com custos nas arestas. Seja t uma aresta de T. É verdade que t é mais barata que qualquer outra aresta do corte fundamental de t relativo a T?
4. ★ [Sedgewick 20.26] Seja T uma MST de um grafo não-dirigido G com custos nas arestas. Suponha agora que uma das arestas de T é removida de G. Mostre como encontrar uma MST do novo grafo em tempo no pior caso proporcional ao número de arestas de G.
5. ★ *Análise de sensibilidade.* Seja G um grafo não-dirigido com custos nas arestas e T uma MST de G. Seja t uma aresta de T e imagine alterar o custo de t (sem alterar os custos das demais arestas). Em quanto posso aumentar o custo de t sem que T deixe de ser uma MST? Em quanto posso diminuir o custo de t sem que T deixe de ser uma MST? Escreva uma função que responda essas perguntas.
6. Seja T uma árvore geradora de um grafo não-dirigido G com custos nas arestas. Prove que T satisfaz o critério de minimalidade baseado em circuitos se e somente se satisfaz o critério de minimalidade baseado em cortes.

Algoritmos

Há algoritmos muito eficientes para resolver o problema da MST. A maioria consome não mais que $E \log V$ unidades de tempo para processar um grafo não-dirigido com V vértices e E arestas. Nos capítulos seguintes examinaremos

- o algoritmo de Prim, que faz crescer uma árvore até que ela se torne geradora,
- o algoritmo de Kruskal, que faz crescer uma floresta geradora até que ela se torne uma árvore.

Esses algoritmos têm caráter *guloso* (= *greedy*): em cada iteração, abocanham a aresta que parece mais promissora naquele momento sem se preocupar com o efeito global dessa escolha. Esses algoritmos são os protótipos da estratégia gulosa que resolve vários outros problemas computacionais.

Exercícios 4

1. [Sedgewick 20.27] Comece com uma árvore geradora qualquer *T* do grafo especificado abaixo. Transforme *T* numa MST tomando as arestas na ordem dada e aplicando, repetidamente, o critério de minimalidade baseado nos circuitos.

```
0-6  0-1  0-2  4-3  5-3  7-4  5-4  0-5  6-4  7-0  7-6  7-1
 51   32   29   34   18   46   40   60   51   31   25   21
```

2. *Algoritmo.* [Sedgewick 20.28]. Mostre que o seguinte algoritmo produz uma MST: Comece com uma árvore geradora *T* qualquer; escolha uma aresta fora de *T*, acrescente-a a *T*, e retire de *T* uma aresta máxima do circuito que se forma; repita enquanto não estabilizar.
3. *Algoritmo.* Mostre que o seguinte algoritmo produz uma MST: Comece com uma árvore geradora *T* qualquer; escolha uma aresta *t* de *T*, retire *t* de *T*, e coloque em seu lugar uma aresta mínima do corte fundamental de *t* relativo a *T*; repita enquanto não estabilizar.
4. [Sedgewick 20.18] Suponha dada uma função `UGRAPHmstE()` que coloca num vetor `mst[]` as arestas de uma árvore. Escreva uma função `UGRAPHmst()` que receba `mst[]` e calcule o vetor de pais `pa[]` da árvore.
5. Suponha dado um grafo não-dirigido com custos *nos vértices* e não nas arestas. Como encontrar uma árvore geradora de custo mínimo?

---

www.ime.usp.br/~pf/algoritmos_para_grafos/
Atualizado em 2019-10-15

IME-USP